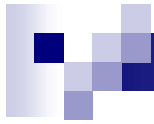




Osnovi računarstva I

Uvod

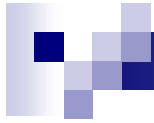


- ECTS formular je objavljen na virtuelnoj oglasnoj tabli:
www.etf.ucg.ac.me
>studijski programi >Osnovne studije EA >OR1 >obavjestenja
- Nastavnik: *Prof. dr Veselin N. Ivanović*; saradnica: *Milica Vušanović*
- Fond časova: 2P+1V+1L
- Literatura:
 - Udžbenik: Lj. Stanković, V.N. Ivanović, M. Radonjić,
Osnovi računarstva, Podgorica, 2016.
 - Zbirka zadataka: M. Radonjić, Osnovi računarstva I – riješeni zadaci.
- Obaveze studenta u toku nastave:
 - pohađa nastavu,
 - odradi laboratorijske vježbe i
 - radi kolokvijum.



- **Oblici provjere znanja i ocjenjivanje:**
 - **Laboratorijske vježbe** ocjenjuju se sa ukupno **10 poena**
 - **Kolokvijum** (predviđen za **17. Nov. 2025.**) ocjenjuje se sa **60 poena**
 - **Završni ispit** (predviđen za **Jan. 2025.**) ocjenjuje se sa **30 poena**
- **Prelazna ocjena se dobija ako student kumulativno sakupi najmanje 50 poena.**
- Konačni rezultati sa **ocjenama** biće poznati **nakon popravnog ispitnog roka.**
- Studenti koji osvoje više od 90, 80, 70, 60, 50 poena, obezbijavaju ocjenu A, B, C, D, E, respektivno.
- Preduslovi da se uspješno savlada gradivo:
 - Dobra volja.
 - Poznavanje 4 osnovne matematičke operacije.
 - Malo vašeg dragocjenog vremena.

Drugim riječima:
Svako može
biti uspješan!



■ Obratiti pažnju:

- Ne postoji obnova laboratorijskih vježbi.
- Redovno pratite obavještenja na virtuelnoj oglasnoj tabli.
- Prigovori na stanje bodova mogu se realizovati lično, a najkasnije 7 dana nakon objavljivanja.
- Svaki komentar, kritiku ili sugestiju slobodno iznesite, lično ili putem e-maila, i biće razmatrani.
- **Učestvujte u nastavi** – nemojte biti samo pasivni posmatrači!



Osnovi računarstva I

Brojni sistemi

- 
- Brojne vrijednosti (brojevi), zavisno od raspoloživog prostora ili svoje namjene, predstavljaju se u različitim brojnim sistemima.
 - Brojne vrijednosti reprezentuju se nizom cifara (digita) odgovarajućeg brojnog sistema.
 - Svaka cifra pojedinačno, *svojom pozicijom* u reprezentaciji brojne vrijednosti, doprinosi njenoj ukupnoj numeričkoj vrijednosti.
 - Brojni sistem koji poznajemo iz svakodnevnog života je **dekadni brojni sistem**.
 - U ovom brojnom sistemu osnova brojanja je 10.
 - Čovjek je brojanje bazirao na deset prstiju svojih ruku, pa je zato dekadni brojni sistem njemu prirodan i poželjan način reprezentacije posmatrane vrijednosti.
 - Dekadni broj predstavljen, u opštem slučaju, zapisom: $abc.de$

ima vrijednost: $a \times 10^2 + b \times 10^1 + c \times 10^0 + d \times 10^{-1} + e \times 10^{-2}$

de cifre a, b, c, d, e uzimaju vrijednosti iz skupa cifara: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

- 
- **Primjer:** Broj 173.76 može biti predstavljen na sljedeći način:

$$1 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$

- U **opštem slučaju** – slučaju proizvoljnog brojnog sistema – osnova može biti proizvoljan prirodni broj **B**, veći od 1. U tom slučaju broj predstavljen zapisom **abc.de** ima vrijednost:

$$a \times B^2 + b \times B^1 + c \times B^0 + d \times B^{-1} + e \times B^{-2}$$

- Proizvoljni broj: $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$
zapisan u brojnom sistemu osnove brojanja **B**, ima (dekadnu) vrijednost:

$$S = \sum_{i=-m}^n a_i B^i$$

pri čemu su cifre a_i upotrijebljenog brojnog sistema cijeli brojevi iz opsega

$$0 \leq a_i \leq B - 1$$

- Gornja jednačina predstavlja **opšti izraz za konverziju broja zapisanog u sistemu proizvoljne osnove brojanja B u dekadni brojni sistem.**



- Težine (položaji) cifara posmatraju se relativno u odnosu na decimalni zarez.
 - Težine cifara cjelobrojnog dijela broja uzimaju pozitivne vrijednosti, u rastućem redu, počev od decimalnog zareza u lijevu stranu.
 - Težine cifara decimalnog dijela broja uzimaju negativne vrijednosti, u opadajućem redu, počev od decimalnog zareza u desnu stranu.
- U istoriji civilizacije korišćeni su i brojni sistemi sa drugim osnovama:
 - Vavilonski brojni sistem, koji se smatra prvim težinskim brojnim sistemom, imao je osnovu brojanja 60 (ostalo kod računanja vremena – sati, minuti, sekunde)
 - Sistem sa osnovom brojanja 12 (danas se upotrebljava u kalendarskoj podjeli godine; u engleskom mjernom sistemu ovaj sistem brojanja je često upotrebljavan – „dozen”)
 - Najpoznatiji netežinski sistem je *Rimski* sistem označavanja brojeva



Osnovi računarstva I

Binarni brojni sistem



- Sa stanovišta računarske tehnike i tehnologije posebno je interesantan binarni brojni sistem, čija je osnova brojanja $B = 2$
- Cifre u ovom brojnom sistemu uzimaju vrijednosti iz skupa cifara $\{0,1\}$
- Fizička realizacija cifara ovog brojnog sistema veoma je jednostavna:
 - zatvoren prekidač može predstavljati binarnu cifru 1, a otvoren binarnu cifru 0;
 - visok nivo napona može označavati 1, a nizak nivo napona 0;
 - jedan smjer magnetnog polja se može tumačiti kao 1, a drugi smjer polja kao 0;
 - ...
 - dva jasno definisana stacionarna stanja tranzistora, zasićenje i zakočenje, mogu označavati binarne vrijednosti 1 i 0.



- U binarnom brojnom sistemu broj $abc.de$

ima vrijednost: $a \times 2^2 + b \times 2^1 + c \times 2^0 + d \times 2^{-1} + e \times 2^{-2}$

- **Primjer** : Binarni zapis broja 1011 predstavlja vrijednost

$$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

- Ukoliko se izvrši izračunavanje ovog izraza, on istovremeno može poslužiti za **tumačenje posmatranog broja u dekadnom brojnom sistemu**, u kome posmatrani binarni broj ima vrijednost:

$$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11$$

- U cilju razlikovanja brojeva zapisanih u različitim brojnim sistemima, prilikom njihovog zapisivanja, u indeksu broja ćemo dodavati vrijednost osnove brojnog sistema:

$$1011_{(2)} = 11_{(10)}$$



Pretvaranje broja iz dekadnog brojnog sistema u binarni

- Razlikuje se za cjelobrojni i decimalni dio dekadnih brojeva.
- Prilikom pretvaranja/konverzije **cjelobrojnog dijela dekadnog broja** u njegov binarni ekvivalent upotrebljava iterativan postupak (izvršava se u nizu veoma sličnih koraka).
- Prva iteracija sastoji se u dijeljenju posmatranog dekadnog broja sa osnovom binarnog brojnog sistema (2) i zapisivanju ostatka dijeljenja.
 - **Tom prilikom može se dobiti ostatak dijeljenja jednak nuli ili jednak jedinici, a to su cifre binarnog brojnog sistema.**
- Postupak se ponavlja, u nizu iteracija, sa količnikom dobijenim u prethodnoj iteraciji.
- Kada se dobije količnik dijeljenja jednak nuli, postupak se prekida.
- **Ostaci dobijeni prilikom dijeljenja sa 2, zapisani obrnutim redom od onog kojim su dobijeni, obrazuju traženi binarni zapis dekadnog br.**

Dokaz:

- Cijeli binarni broj $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$, čije pojedinačne cifre $a_i \in \{0, 1\}$ **treba odrediti**, u dekadnom brojnom sistemu ima **poznatu vrijednost S**,

$$S = a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \dots + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0.$$

- Podijelimo dekadni broj S osnovom brojanja binarnog brojnog sistema:

$$S / 2 = a_n \times 2^{n-1} + a_{n-1} \times 2^{n-2} + \dots + a_2 \times 2 + a_1, \text{ sa ostatkom } a_0$$

- Primijetimo da ovim dijeljenjem kao ostatak dobijamo a_0 , najmanje značajnu cifru posmatranog binarnog broja

- Ponavljamo postupak:

$$(S / 2) / 2 = S / 2^2 = a_n \times 2^{n-2} + a_{n-1} \times 2^{n-3} + \dots + a_2, \text{ sa ostatkom } a_1$$

...

$$S / 2^n = a_n, \text{ sa ostatkom } a_{n-1}$$

$$S / 2^{n+1} = 0 \leftarrow \text{sa ostatkom } a_n$$

KRAJ



- *Primjer*: Pretvoriti dekadni broj $23_{(10)}$ u njemu odgovarajući binarni zapis.
- *Rješenje*:

	ostatak
$23/2=11$	$1 \rightarrow a_0$
$11/2=5$	$1 \rightarrow a_1$
$5/2=2$	$1 \rightarrow a_2$
$2/2=1$	$0 \rightarrow a_3$
$1/2=0$	$1 \rightarrow a_4$

Prema tome, dekadnom broju $23_{(10)}$ odgovara binarni zapis $10111_{(2)}$

- 
- Prilikom pretvaranja **decimalnog dijela dekadnog broja** u njegov binarni ekvivalent upotrebljava se takođe iterativan postupak.
 - Prva iteracija sastoji se u množenju decimalnog dijela posmatranog dekadnog broja sa osnovom binarnog brojnog sistema (2) i zapisivanju cjelobrojnog dijela dobijenog rezultata.
 - **Tom prilikom može se dobiti cjelobrojni dio rezultata jednak nuli ili jednak jedinici, a to su cifre binarnog brojnog sistema.**
 - Postupak se ponavlja, u nizu iteracija, sa decimalnim dijelom dobijenim u prethodnoj iteraciji.
 - Kada se dobije decimalni dio jednak nuli, ili se postigne željena tačnost (preciznost) konverzije (željeni br. decimala), postupak se prekida.
 - **Cjelobrojni djelovi dobijeni prilikom množenja sa 2, zapisani redom kojim su dobijeni, obrazuju traženi binarni zapis decimalnog dijela dekadnog broja. Ne zaboraviti vodeću nulu i decimalni zarez!**
 - Dokaz je analogan dokazu za konverziju cjelobrojne vrijednosti – pogledati u literaturi!

- 
- *Primjer* : Odrediti binarni ekvivalent decimalnom dekadnom broju $0.8125_{(10)}$

- *Rješenje*:

	cijeli dio rezultata
$0.8125 \times 2 = 1.625$	$1 \rightarrow a_{-1}$
$0.625 \times 2 = 1.25$	$1 \rightarrow a_{-2}$
$0.25 \times 2 = 0.5$	$0 \rightarrow a_{-3}$
$0.5 \times 2 = 1.0$	$1 \rightarrow a_{-4}$

Traženi binarni zapis je $0.1101_{(2)}$, odnosno $0.8125_{(10)} = 0.1101_{(2)}$

- Dekadni broj sa konačnim brojem decimalnih mjesta za svoj binarni ekvivalent **može** imati broj sa beskonačnim brojem decimalnih mjesta.
- Ova činjenica predstavlja značajan nedostatak binarnog zapisa brojnih veličina, pošto **onemogućava** u potpunosti tačnu binarnu reprezentaciju proizvoljnog dekadnog broja, odnosno njegov u potpunosti tačan binarni zapis u računaru.
- **Primjer:** Zapisati dekadni broj $0.425_{(10)}$ u binarnom obliku.

■ *Rješenje:*

cijeli dio rezultata

$$0.425 \times 2 = 0.85$$

$$0 \rightarrow a_{-1}$$

$$0.85 \times 2 = 1.7$$

$$1 \rightarrow a_{-2}$$

$$0.7 \times 2 = 1.4$$

$$1 \rightarrow a_{-3}$$

$$0.4 \times 2 = 0.8$$

$$0 \rightarrow a_{-4}$$

$$0.8 \times 2 = 1.6$$

$$1 \rightarrow a_{-5}$$

$$0.6 \times 2 = 1.2$$

$$1 \rightarrow a_{-6}$$

$$0.2 \times 2 = 0.4$$

$$0 \rightarrow a_{-7}$$



Osnovi računarstva I

Oktalni brojni sistem

- 
- Broj zapisan u binarnom obliku zahtijeva značajno veći broj cifara u odnosu na zapisivanje istog br. u bilo kom drugom brojnom sistemu.

Dokaz:

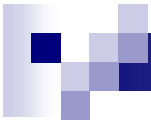
$$S = \sum_{i=-m}^n a_i B^i \Rightarrow$$

B>1, tj. Bmin=2, tako da binarni zapis zahtijeva najveći br. cifara a_i da bi se postigla tražena brojna vrijednost S!!

- Reprezentacijom brojnih veličina u sistemima čije osnove brojanja predstavljaju **stepen osnove brojanja binarnog brojnog sistema** nastoji se ublažiti ovaj problem.
- Kod oktalnog brojnog sistema osnova brojanja je $B = 8 = 2^3$
- Broj **abc.de**, zapisan u oktalnom brojnom sistemu ima vrijednost:
$$a \times 8^2 + b \times 8^1 + c \times 8^0 + d \times 8^{-1} + e \times 8^{-2}.$$
- Oktalna cifra može uzeti neku od vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- **Primjer** : Zapisati oktalni broj $107.1_{(8)}$ u dekadnom obliku.
- **Rješenje**: $1 \times 8^2 + 7 \times 8^0 + 1 \times 8^{-1} = 71.125_{(10)}$

Pretvaranje broja iz dekadnog brojnog sistema u oktalni

- Izvršava se na **analogan** način kao iz **dekadnog u binarni** brojni sistem – dijeljenjem cjelobrojnog, odnosno množenjem decimalnog dijela dekadnog broja sa osnovom brojanja oktalnog brojnog sistema ($B=8$)
 - ostaci dobijeni dijeljenjem cjelobrojnog dijela dekadnog broja sa $B=8$ zapisuju se suprotnim redom od onog kojim su dobijeni
 - cjelobrojni djelovi proizvoda decimalnog dijela dekadnog broja sa $B=8$ zapisuju se onim redom kojim su izračunati
- Dokaz je analogan dokazu za prelaz iz dekadnog u binarni brojni sistem: **uraditi za vježbu** (dokaz se nalazi i u literaturi)
- **Opšti zaključak:** *Konverzija iz dekadnog u brojni sistem proizvoljne osnove brojanja B vrši se dijeljenjem cjelobrojnog, odnosno množenjem decimalnog dijela dekadnog broja osnovom brojanja B brojnog sistema u koji se vrši konverzija, te zapisivanjem ostataka dobijenih dijeljenjem suprotnim redom od onog kojim su ostaci dobijeni, kao i zapisivanjem cjelobrojnih djelova proizvoda onim redom kojim su izračunati.*



- *Primjer* : Zapisati dekadni broj $354_{(10)}$ u oktalnom obliku.
- *Rješenje*:

	Ostatak
$354/8 = 44$	$2 \rightarrow a_0$
$44/8 = 5$	$4 \rightarrow a_1$
$5/8 = 0$	$5 \rightarrow a_2$

Prema tome, $354_{(10)} = 542_{(8)}$

Pretvaranje broja iz binarnog brojnog sistema u oktalni i obrnuto

- Za prelazak iz binarnog u oktalni brojni sistem dovoljno je izvršiti grupisanje po tri binarne cifre (tzv. **triade**) i njih zapisati u dekadnom obliku.

- **Dokaz:** Posmatrajmo cijeli binarni broj $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$, đe je $a_i \in \{0, 1\}$ i upotrijebimo ono što već znamo (konverzije **(2)→(10)→(8)**)

- Brojna vrijednost ovog broja u dekadnom brojnom sistemu iznosi:

$$S = a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + a_{n-2} \times 2^{n-2} + \dots \\ + a_5 \times 2^5 + a_4 \times 2^4 + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0.$$

- Pretpostavimo da je $n = 3m - 1$, gdje je m prirodan broj, kako bi se posmatrana dekadna brojna vrijednost S mogla predstaviti sumom skupina sastavljenih od po tri sabirka.

Napomena: Ova pretpostavka uvijek može biti zadovoljena – dodavanjem nula sa lijeve strane broja!

- Grupisanjem po tri sabirka, suma S poprima oblik:

$$S = (a_n \times 2^2 + a_{n-1} \times 2 + a_{n-2}) \times 2^{n-2} + \dots \\ + (a_5 \times 2^2 + a_4 \times 2 + a_3) \times 2^3 + (a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0).$$

- Zamjenom $n = 3m - 1$ u prethodnom izrazu, dobija se:

$$S = b_{m-1} \times 2^{3m-3} + \dots + b_1 \times 2^3 + b_0 = b_{m-1} \times 2^{3(m-1)} + \dots + b_1 \times 2^3 + b_0 \\ = b_{m-1} \times 8^{m-1} + \dots + b_1 \times 8 + b_0.$$

- Posljednji izraz predstavlja reprezentaciju dekadne sume S u oktalnom obliku, đe su koeficijenti $b_i, i=0,1,\dots,m-1$, cifre oktalnog brojnog sistema:

$$b_{m-1} = a_{3m-1} \times 2^2 + a_{3m-2} \times 2 + a_{3m-3}$$

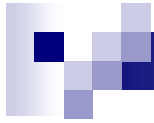
...

$$b_1 = a_5 \times 2^2 + a_4 \times 2 + a_3$$

$$b_0 = a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0$$

odnosno: $b_i \in \{0,1,\dots,7\}$

**Analogno se dokazuje
za decimalni dio broja**



- *Primjer* : Zapisati binarni broj $1011010111.10_{(2)}$ u oktalnom obliku.
- *Rješenje*:
 - Dodati dvije nule sa lijeve strane cijelog dijela posmatranog broja
 - Dodati jednu nulu sa desne strane decimalnog dijela istog broja
 - Grupisati po tri binarne cifre
 - Tumačiti pojedinačno grupisane skupine od po 3 binarne cifre (dekadno):

001	011	010	111	.	100
1	3	2	7	.	4

$$\Rightarrow 1011010111.10_{(2)} = 1327.4_{(8)}$$

- 
- **Primjer** : Pronaći binarni ekvivalent oktalanom broju $7012.3_{(8)}$.

- **Rješenje**:

7	0	1	2	.	3
111	000	001	010	.	011

Traženi binarni broj je $111000001010.011_{(2)}$.

- Iz svega navedenog može se zaključiti da se konverzija iz binarnog u oktalni brojni sistem i obrnuto može izvršiti na 2 načina:

1. **Konverzijom najprije u dekadni brojni sistem, a potom iz dekadnog u zahtijevani brojni sistem.**

Napomena: Ovaj način je **univerzalan** i važi za konverziju brojeva iz proizvoljnog brojnog sistema osnove brojanja (a) u proizvoljni brojni sistem osnove brojanja (b) **(simbolički zapisano: $(a) \rightarrow (10) \rightarrow (b)$).**

2. **Grupisanjem po tri binarne cifre u tzv. triade i zapisivanjem svake triade njenom oktalanom vrijednošću; i obrnuto: predstavljanjem svake cifre posmatranog oktalnog broja njenim trocifrenim binarnim ekvivalentom.**



Osnovi računarstva I

Heksadekadni brojni sistem

- 
- Kod heksadekadnog brojnog sistema osnova brojanja je $B = 16 = 2^4$
 - Za zapis nekog broja potrebno je imati na raspolaganju 16 različitih cifara u ovom brojnom sistemu.

- Skup cifara heksadekadnog brojnog sistema je

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

- *Primjer* : Zapisati heksadekadni broj $8A31F.2_{(16)}$ u dekadnom obliku.

- *Rješenje*:

$$\begin{aligned} 8 \times 16^4 + A \times 16^3 + 3 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + F \times 16^0 + 2 \times 16^{-1} \\ = 566047.125_{(10)} \end{aligned}$$

- **Binarni broj se pretvara u heksadekadni oblik grupisanjem po 4 binarne cifre (tzv. *tetrade*), te njihovim kasnijim pojedinačnim tumačenjem u heksadekadnom obliku.**
- Dokaz ovog stava u potpunosti je analogan dokazu sprovedenom u slučaju oktalnog brojnog sistema (*uraditi za vježbu*)

- 
- **Primjer** : Zapisati binarni broj $100100111101010_{(2)}$ u heksadekadnom obliku.

- **Rješenje**:

0100	1001	1110	1010
4	9	E	A

Heksadekadni ekvivalent posmatranog binarnog broja je $49EA_{(16)}$

- **Primjer** : Prikazati heksadekadni broj $A95_{(16)}$ u binarnom brojnom sistemu.

- **Rješenje**:

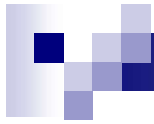
A	9	5
1010	1001	0101

$$\Rightarrow A95_{(16)} = 101010010101_{(2)}$$



Osnovi računarstva I

Binarna aritmetika



- Zbog posebne važnosti binarnog brojnog sistema (savremeni računari koriste upravo ovaj zapis) detaljno ćemo obraditi osnovne aritmetičke operacije sa brojevima u tom sistemu.
- Aritmetika u binarnom brojnom sistemu sasvim je slična aritmetici sa dekadnim brojevima, a u mnogim elementima i znatno jednostavnija.



Osnovi računarstva I

Binarna aritmetika

Sabiranje u binarnom brojnom sistemu



- Prilikom sabiranja binarnih cifara razlikuju se 4 slučaja i to:
 - $0 + 0 = 0$ sa prenosom 0 na naredno težinsko mjesto
 - $0 + 1 = 1$ sa prenosom 0 na naredno težinsko mjesto
(isto što i $1 + 0 = 1$ sa prenosom 0 na naredno težinsko mjesto)
 - $1 + 1 = 10$, odnosno 0 sa prenosom 1 na naredno težinsko mjesto
 - $1 + 1 + 1 = 11$, odnosno 1 sa prenosom 1 na naredno težinsko mjesto.
- Gornji slučajevi odnose se na binarne cifre tekućeg (posmatranog) težinskog mjesta binarnog broja.
- Prenos se odnosi na prenos koji se dešava sa tekućeg na naredno (više) težinsko mjesto posmatranog binarnog broja.

- 
- **Primjer** : Sabrati binarne brojeve 1011.1 i 101.11

- **Rješenje**:

- Posmatrane binarne brojeve **treba najprije zapisati tako da decimalni zarezi budu jedan ispod drugog**.
- Primjenjujući navedena pravila sabiranja binarnih cifara na svim pojedinačnim težinskim mjestima sabiraka, počev od najnižeg – krajnjeg desnog težinskog mjesta prema višim (lijevim) težinskim mjestima, dobijamo:

$$\begin{array}{r} 1011.10 \\ + \quad 101.11 \\ \hline 10001.01 \end{array}$$

Provjerom u dekadnom br. sistemu: $11.5_{(10)} + 5.75_{(10)} = 17.25_{(10)}$